Un opérateur d'extension linéaire explicite

Par Pascal BEAUGENDRE

Résumé. Dans cet article, on démontre que les polynômes de Tchebyshev forment une base de Schauder de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur l'intervalle [-1,1]. Ensuite, on construit un opérateur d'extension linéaire continu explicite de $C^\infty([-1,1])$ dans $C_0^\infty([-2,2])$. Il s'agit de résultats dus à B. S. Mityagin. Ils jouent un rôle important dans certains travaux récents et sont présentés ici de façon à être accessibles aux étudiants de Mathématiques Spéciales. Ce travail sera l'occasion de présenter quelques résultats classiques : une inégalité de Markov et la formule de Faà di Bruno.

Mots clés : Polynômes de Tchebyshev, théorème d'extension de Whitney, opérateur d'extension linéaire continu, propriété de Markov, formule de Faà di Bruno, bases de Schauder.

(Article à paraître dans la Revue de la Filière Mathématiques - RMS)

Un opérateur d'extension linéaire explicite

Par Pascal BEAUGENDRE
Lycée HOCHE de Versailles et
Université de Paris XI Orsay, Mathématiques Bât. 425, 91405 ORSAY.
pascal.beaugendre (at) laposte.net

Résumé

Dans cet article, on démontre que les polynômes de Tchebyshev forment une base de Schauder de l'espace des fonctions de classe C^{∞} sur l'intervalle $[-1,1]$. Ensuite, on construit un opérateur d'extension linéaire continu explicite de $C^{\infty}([-1,1])$ dans $C_0^{\infty}([-2,2])$. Il s'agit de résultats dus à B. S. Mityagin. Ils jouent un rôle important dans certains travaux récents et sont présentés ici de façon à être accessibles aux étudiants de Mathématiques Spéciales. Ce travail sera l'occasion de présenter quelques résultats classiques : une inégalité de Markov et la formule de Faà di Bruno.

Mots clés : Polynômes de Tchebyshev, théorème d'extension de Whitney, opérateur d'extension linéaire continu, propriété de Markov, formule de Faà di Bruno, bases de Schauder.

1 Introduction

Certains problèmes d'extension dans la classe C^{∞} peuvent être posés de façon assez simple. Par exemple, la question de l'extension au-dessus d'un point est bien connue puisqu'il s'agit du théorème de Borel ([2]).

Théorème 1 (Borel) *Soit $(u_p)_{p\geq 0}$ une suite de réels. Il existe une fonction f appartenant à $C^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier p, on ait $u_p = f^{(p)}(0)$.*

On dit que l'on a réalisé l'extension au-dessus du singleton $\{0\}$.

Si on s'intéresse à l'extension au-dessus $[-1,1]$, il s'agit de la question suivante : si f est une fonction de classe C^{∞} sur $[-1,1]$, existe-t-il une fonction $\widetilde{f}$, de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, telle que l'on ait $\widetilde{f}_{|[-1,1]} = f$? Il est facile de constater que la réponse à cette question est oui. Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de Borel aux extrémités de l'intervalle, c'est-à-dire aux suites $\left(f^{(p)}(-1)\right)_{p\geq 0}$ et $\left(f^{(p)}(1)\right)_{p\geq 0}$. Malheureusement ce procédé ne permet pas d'obtenir un opérateur d'extension linéaire continu car il n'en existe pas au-dessus d'un singleton (voir l'annexe **2**).

Dans cet article, on construit de façon explicite un tel opérateur pour l'extension au-dessus de $[-1,1]$. La méthode comporte deux étapes : on cherche d'abord une base de l'espace $C^{\infty}([-1,1])$ puis, en étendant convenablement les éléments de cette base, on obtient l'opérateur désiré.

2 Les polynômes de Tchebyshev et l'inégalité de Markov pour le segment $[-1,1]$

2.1 Les polynômes de Tchebyshev

Dans ce paragraphe on définit les polynômes de Tchebyshev et on démontre quelques propriétés élémentaires utiles pour la suite de cet article.

Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. On a

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \operatorname{Re}(\cos(\arccos x) + i\sin(\arccos x))^n \\ &= \operatorname{Re}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \left(1-x^2\right)^{\frac{k}{2}} x^{n-k}\right) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2-1\right)^{\frac{k}{2}} x^{n-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, T_n est un polynôme de degré n, c'est *le polynôme de Tchebyshev* de degré n. On continuera à le noter T_n lorsqu'il est défini sur $\mathbb{R}$.

Les trois propriétés suivantes sont immédiates.

Propriété 1 *Pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) \in [-1,1]$.*

Propriété 2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$; le polynôme T_n a donc la parité de n.*

Propriété 3 *La suite de polynômes $(T_n(X))_{n\geq 0}$ vérifie*

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X$$

et, pour tout entier $n \geq 2$,

$$T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X). \tag{1}$$

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1,1]$, on a*

$$|T_n'(x)| \leq n^2.$$

Démonstration. L'égalité $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ implique que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(\sin t) T_n'(\cos t) = n \sin(nt)$. En posant $t = \arccos x$ lorsque $x \in]-1, 1[$, on obtient $T_n'(x) = \frac{n \sin(nt)}{\sin t}$ et donc $|T_n'(x)| \leq n^2$. On termine la démonstration en utilisant la continuité de T_n' sur $[-1, 1]$. ■

Proposition 2 *Pour tout entier n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a*

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right]. \tag{2}$$

Démonstration. Cette formule se démontre en utilisant la relation (1). En effet, lorsque x est fixé, la suite $(T_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 = 2xr - 1$. ■

2.2 Une inégalité de Markov pour le segment $[-1, 1]$

Dans cette partie, on se propose de démontrer l'inégalité de A.A. Markov pour le segment $[-1, 1]$, en suivant la méthode de M. V. Golitschek [4]. A partir d'ici n désigne un entier naturel.

Notation 1 Si I est un segment et si ϕ est une fonction continue sur I, on pose

$$\|\phi\|_I = \sup_{t \in I} |\phi(t)|.$$

Définition 1 On dit que T est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n, s'il existe $c, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], T(t) = c + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)).$$

Lemme 1 *Si T est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n et si $\|T\|_{[-\pi,\pi]} < 1$, on a*

$$\forall t \in [-\pi, \pi], T'^2(t) + n^2 T^2(t) \leq n^2.$$

Démonstration. Si $n = 0$, alors le polynôme trigonométrique T est constant et l'inégalité est satisfaite.

On suppose que $n > 0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $t = 0$ et que $T'(0) \geq 0$. Soit $\alpha = \frac{\arcsin(T(0))}{n}$. Considérons la fonction définie par $S(t) = \sin(n(t + \alpha)) - T(t)$, c'est un polynôme trigonométrique non nul de degré inférieur ou égal à n.

Si on pose, pour tout $k \in [[-n, n-1]]$, $t_k = -\alpha + \frac{(2k-1)}{2n}\pi$, alors

$$\begin{aligned} S(t_k) &= \sin\left(n\left(-\alpha - \frac{(2k-1)}{2n}\pi + \alpha\right)\right) - T\left(-\alpha + \frac{(2k-1)}{2n}\pi\right) \\ &= \cos(-k\pi) - T\left(-\alpha + \frac{(2k-1)}{2n}\pi\right) \\ &= (-1)^{k+1} - T\left(-\alpha + \frac{(2k-1)}{2n}\pi\right) \end{aligned}$$

et, puisque $\|T\|_{[-\pi,\pi]} < 1$, on a $\left|T\left(-\alpha + \frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)\right| < 1$. Donc $S(t_k)$ est du signe de $(-1)^{k+1}$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in [[-n, n-1]]$, il existe $c_k \in]t_k, t_{k+1}[$ tel que $S(c_k) = 0$. Le polynôme trigonométrique S n'a pas d'autre valeur d'annulation dans $]-\pi, \pi[$. (Sinon on pourrait construire un polynôme complexe non nul ayant trop de racines.) D'autre part $t_0 < 0 < t_1$ et $S(0) = 0$, donc $c_0 = 0$. De plus $S_n(t_1) > 0$ car $S_n(t_1)$ est du signe de $(-1)^2$. L'inégalité $S'(0) < 0$ impliquerait l'existence d'une autre valeur d'annulation de S dans $]0, t_1[$. On a donc $S'(0) \geq 0$. Ainsi

$$0 \leq T'(0) = n\cos(n(0+\alpha)) - S'(0)$$

et donc

$$T'(0) \leq n\cos(n\alpha) = n\sqrt{1 - T^2(0)},$$

ce qui termine la démonstration. ■

Théorème 2 *Si T est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n, on a*

$$\forall t \in [-\pi, \pi], T'^2(t) + n^2T^2(t) \leq n^2\|T\|^2_{[-\pi,\pi]}.$$

Démonstration. Soit $t \in [-\pi, \pi]$ et soit $\lambda > \|T\|_{[-\pi,\pi]}$, en appliquant le lemme 1 à $\frac{T}{\lambda}$, on obtient

$$T'^2(t) + n^2T^2(t) \leq n^2\lambda^2.$$

On conclut en faisant tendre λ vers $\|T\|^2_{[-\pi,\pi]}$. ■

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3 (inégalité de Bernstein) *Si T est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n, on a*

$$\|T'\|_{[-\pi,\pi]} \leq n\|T\|_{[-\pi,\pi]}.$$

Corollaire 1 *Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, on a*

$$\forall x \in]-1, 1[, |P'(x)| \leq \frac{n\|P\|_{[-1,1]}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Soit T le polynôme trigonométrique défini par $T(t) = P(\cos t)$. Alors, d'après le théorème précédent, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a

$$|T'(t)| \leq n \|T\|_{[-\pi,\pi]} = n \|P\|_{[-1,1]} .$$

Or $T'(t) = -(\sin t) P'(\cos t)$ donc $|T'(t)| = \left|\sqrt{1-x^2} P'(x)\right|$, en posant $x = \cos t$. Ainsi $\left|\sqrt{1-x^2} P'(x)\right| \leq n \|P\|_{[-1,1]}$. ■

Maintenant on peut énoncer et démontrer le théorème de A. A Markov pour le segment $[-1, 1]$.

Théorème 4 *Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, on a*

$$\|P'\|_{[-1,1]} \leq n^2 \|P\|_{[-1,1]} .$$

Démonstration. On peut supposer que $n > 0$ (sinon il n'y a rien à montrer). Il suffit de prouver que si $\|P\|_{[-1,1]} < 1$, on a

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, |P'(x)| \leq n^2. \tag{3}$$

En effet, par continuité, (3) implique

$$\|P'\|_{[-1,1]} \leq n^2.$$

Ensuite, comme pour la démonstration du théorème 2, on conclut en appliquant ce résultat à $\frac{P}{\lambda}$ avec $\lambda > \|T\|$ et en faisant tendre λ vers $\|T\|$.

On suppose donc que $\|P\|_{[-1,1]} < 1$ et que $x \in \left]-1, 1\right[$. On pose $z = \cos \frac{\pi}{2n}$, alors $\sqrt{1-z^2} = \sin \frac{\pi}{2n} \geq \frac{1}{n}$. (Cela provient de la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$.)

a) Si $|x| \leq z$, d'après le corollaire 1, on a

$$|P'(x)| \leq \frac{n \|P\|_{[-1,1]}}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{n \|P\|_{[-1,1]}}{\sqrt{1-z^2}} \leq n^2 \|P\|_{[-1,1]} .$$

b) Si $|x| > z$, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $z < x < 1$ et que $P'(x) \geq 0$. Deux cas sont alors possibles.

i) Si $P(x) \geq T_n(x)$, alors, en utilisant le lemme 1 avec $T(t) = P(\cos t)$ et $x = \cos t$, on obtient

$$|P'(x)| = \left|\frac{T'(t)}{\sin t}\right| \leq \frac{n}{|\sin t|} \sqrt{1 - T^2(t)} = \frac{n}{|\sin t|} \sqrt{1 - P^2(\cos t)}$$

donc

$$|P'(x)| \leq \frac{n}{|\sin t|} \sqrt{1 - T_n^2(\cos t)} = \frac{n |\sin(nt)|}{|\sin t|} = |T_n'(x)| \leq n^2.$$

ii) Si $P(x) < T_n(x)$, alors le polynôme $T_n - P$ est du signe de T_n aux points extrémaux de T_n. En effet, si on pose $y_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, pour tout $k \in [[0, n]]$, alors, puisque $\|P\|_{[-1,1]} < 1$, $(T_n - P)(y_k)$ est du signe de $(-1)^k$. Donc $T_n - P$ a au moins $n-1$ zéros dans $[-1, y_1[$. Comme $T_n - P$ change encore de signe entre y_1 et x, il a aussi un zéro α dans $]y_1, x[$. Ainsi $T_n - P$ a n zéros deux à deux distincts dans $[-1, \alpha]$. Donc, en utilisant le théorème de Rolle, on voit que tous les zéros de $T_n' - P'$ sont dans $]-1, \alpha[$, il s'ensuit que $T_n' - P'$ est de signe constant sur $[\alpha, +\infty[$. Or $T_n'(\alpha) - P'(\alpha) = 0$ et $(T_n - P)(x) > 0$ donc $T_n' - P' \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$. Ceci implique $0 \leq P'(x) \leq T_n'(x) \leq n^2$. ■

Remarque 1 En considérant les polynômes de Tchebyshev on peut facilement vérifier que l'inégalité du théorème 4 ne peut pas être améliorée.

En réitérant on en déduit le résultat suivant.

Proposition 3 *Soit P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout entier k, on a*

$$\left\|P^{(k)}\right\|_{[-1,1]} \leq n^2 (n-1)^2 \ldots (n-k+1)^2 \|P\|_{[-1,1]}. \tag{4}$$

En particulier, pour tous p et n, on a

$$\left\|T_n^{(p)}\right\|_{[-1,1]} \leq n^{2p}. \tag{5}$$

Remarque 2 L'inégalité (4) de la proposition précédente n'est pas optimale. Des versions plus précises sont données dans [3] p. 131 ou [9] p. 123. Ici nous n'aurons pas besoin de ces raffinements.

2.3 Majorations au voisinage du segment $[-1, 1]$

Théorème 5 *Soit $P(X)$ appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, alors, pour tout réel x, $|x| \geq 1$, on a*

$$|P(x)| \leq |T_n(x)| \, \|P\|_{[-1,1]}. \tag{6}$$

Démonstration. Soit $M > \|P\|_{[-1,1]}$ et soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Le polynôme $MT_n + \varepsilon P$ est du signe de T_n aux points extrémaux de T_n (les réels $y_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k \in [[0, n]]$). Il a donc n zéros deux à deux distincts dans $[-1, 1]$ et, puisqu'il appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, il n'a pas d'autre zéro. Comme $(MT_n + \varepsilon P)(1) = M + \varepsilon P(1) \geq 0$, on a $MT_n + \varepsilon P \geq 0$ sur $]1, +\infty[$ et donc $|P| \leq MT_n$ sur $]1, +\infty[$. En remplaçant $P(X)$ par $P(-X)$ et en utilisant la parité de T_n, on en déduit que $|P| \leq M |T_n|$ sur $]-\infty, -1[$. Ainsi

$$\forall x \notin [-1, 1], |P(x)| \leq M |T_n(x)|.$$

On conclut en faisant tendre M vers $\|P\|_{[-1,1]}$. ■

Nous allons maintenant terminer ce paragraphe en établissant des majorations des polynômes $T_n^{(p)}$ au voisinage du segment $[-1, 1]$.

Proposition 4 *Si* $x \in \left[-1 - \frac{1}{1+n^2}, 1 + \frac{1}{1+n^2}\right]$*, alors, pour tout* $p \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\left|T_n^{(p)}(x)\right| \leq e^2 n^{2p}. \tag{7}$$

Démonstration. Compte tenu de l'inégalité (5) il n'y a rien à prouver lorsque $|x| \leq 1$.

D'après l'inégalité (6), pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, on a

$$\left|T_n^{(p)}(x)\right| \leq |T_n(x)| \left\|T_n^{(p)}\right\|_{[-1,1]} \leq |T_n(x)| \, n^2 (n-1)^2 \ldots (n-p+1)^2 .$$

Si $1 \leq |x| \leq 1 + \frac{1}{1+n^2}$, la proposition 2 donne

$$\begin{aligned} |T_n(x)| = |T_n(|x|)| &= \frac{1}{2}\left[\left(|x| + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \\ &\leq \left|1 + \frac{1}{1+n^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^2 - 1}\right|^n . \end{aligned}$$

Or

$$1 + \frac{1}{1+n^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{1+n^2} + \sqrt{\frac{2}{1+n^2} + \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^2}.$$

Pour $\sqrt{3} \leq n$, on a $\frac{1}{1+n^2} + \sqrt{\frac{2}{1+n^2} + \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^2} \leq 2\sqrt{\frac{1}{1+n^2}}$. Donc, lorsque $1 < |x| \leq 1 + \frac{1}{1+n^2}$ et $n \geq 2$, on a

$$|T_n(x)| \leq \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{1+n^2}}\right)^n \leq \left(1 + 2\frac{1}{n}\right)^n \leq e^2.$$

Il s'ensuit que, si $1 < |x| \leq 1 + \frac{1}{1+n^2}$, on a

$$\left|T_n^{(p)}(x)\right| \leq e^2 n^2 (n-1)^2 \ldots (n-p+1)^2 \leq e^2 n^{2p}.$$

Enfin, pour $n = 0$ ou $n = 1$ cette dernière majoration est vraie. ■

3 Une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet $C^\infty([-1,1]) = \bigcap_{k \geq 0} C^k([-1,1])$

Notation 2 Dans tout ce paragraphe, si $g \in C^\infty([-1,1])$, on note, pour tout entier k,

$$\|g\|_{(k)} = \max_{i \leq k} \left\|\frac{g^{(i)}}{i!}\right\|_{[-1,1]} .$$

Remarque 3 Pour tout entier k, $\|.\|_{(k)}$ est une norme sur l'espace $C^k([-1,1])$. Muni de cette norme, $C^k([-1,1])$ est un espace de Banach.

Remarque 4 L'espace $C^\infty([-1,1])$, muni de cette famille de normes, est un espace de Fréchet. Aucune notion sur ces espaces n'est nécessaire à la compréhension de cet article, hormis la définition de la continuité d'une application linéaire entre deux espaces de Fréchet qui sera donnée au paragraphe 4. Le lecteur qui désir un cadre topologique plus familier peut simplement considérer que $C^\infty([-1,1])$ est muni de la topologie induite par la distance

$$d : (C^\infty([-1,1]))^2 \to \mathbb{R}_+; (f,g) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_{(k)}}{1+\|f-g\|_{(k)}}.$$

Il est facile de vérifier que $(C^\infty([-1,1]), d)$ est un espace métrique complet. Nous n'aurons pas besoin d'entrer dans ces détails que le lecteur pourra trouver, par exemple, dans [6].

Notation 3 Si f est une fonction continûment dérivable sur $[-1,1]$, on pose

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \cos)(t)\, dt$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \cos)(t) \cos(nt)\, dt.$$

On démontre tout d'abord un lemme fournissant le développement de Tchebyshev d'une fonction de classe C^1.

Lemme 2 *Soit f une fonction continûment dérivable sur $[-1,1]$, pour tout $x \in [-1,1]$, on a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) T_n(x). \tag{8}$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto f(\cos t)$ est paire, 2π-périodique et continûment dérivable. En utilisant le théorème de Dirichlet, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(\cos t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt).$$

Si $x \in [-1,1]$, en posant $t = \arccos x$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos(n \arccos x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) T_n(x).$$

■

Remarque 5 Le théorème 6 qui constituera le résultat principal de ce paragraphe va montrer que la série (8) converge «normalement» dans l'espace $C^{\infty}([-1,1])$.

On rappelle le résultat suivant, il s'agit de la formule de Faà di Bruno pour la dérivation de la composée de deux fonctions de classe C^{∞}. Sa démonstration est donnée dans l'annexe **1**.

Proposition 5 *Soient f et g deux fonctions de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier r strictement positif et tout réel x, on a*

$$\frac{(f\circ g)^{(r)}(x)}{r!}=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f^{(i)}(g(x))}{i!}\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{g^{(s)}(x)}{s!}\right)^{j_s}\right)\tag{9}$$

en posant $J_{i,r}=\{(j_1,...,j_r)\in\mathbb{N}^r,\sum_{s=1}^{r}sj_s=r$ et $\sum_{s=1}^{r}j_s=i\}$. De plus les constantes $C_{J,i,r}$ vérifient

$$\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}=\binom{r-1}{i-1}.$$

Lemme 3 *Soit f une fonction appartenant à $C^{\infty}([-1,1])$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $r\in\mathbb{N}$, on a*

$$|a_n(f)|\leq\frac{r!}{n^r}\|f\|_{(r)}2^r.\tag{10}$$

Démonstration. On suppose que r est strictement positif (sinon le résultat est évident). En effectuant r intégrations par parties, on obtient

$$a_n(f)=\frac{(-1)^p}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi}(f\circ\cos)^{(r)}(t)\cos(nt)\,dt \text{ si } r=2p$$

ou

$$a_n(f)=\frac{(-1)^{p+1}}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi}(f\circ\cos)^{(r)}(t)\sin(nt)\,dt \text{ si } r=2p+1.$$

Or, d'après la formule de Faà di Bruno, on a

$$\frac{(f\circ\cos)^{(r)}(t)}{r!}=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f^{(i)}(\cos(t))}{i!}\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{(\cos)^{(s)}(t)}{s!}\right)^{j_s}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{\left|(f\circ\cos)^{(r)}(t)\right|}{r!}\leq 2^{r-1}\sup_{0\leq i\leq r}\frac{\left\|f^{(i)}\right\|_{[-1,1]}}{i!}=2^{r-1}\|f\|_{(r)}.$$

Enfin, on conclut en intégrant la majoration ainsi obtenue. ■

Voici le théorème principal de ce paragraphe :

Théorème 6 ***a)*** *Le système* $\left\{(T_n)_{n\geq 0}, (a_n)_{n\geq 0}\right\}$ *est biorthogonal dans* $C^\infty([-1,1])$.
b) *Pour toute fonction* f *appartenant à* $C^\infty([-1,1])$, *on a*

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) T_n(x).$$

c) *Pour toute norme* $\|.\|_{(h)}$, *il existe une norme* $\|.\|_{(k)}$ *et une constante* $C \geq 0$ *telles que l'on ait*

$$\forall f \in C^\infty([-1,1]), \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)| \|T_n\|_{(h)} \leq C \|f\|_{(k)}. \tag{11}$$

Démonstration. La biorthogonalité signifie que $a_n(T_k) = \delta_{n,k}$ (le symbole de Kronecker). La vérification est facile, elle est laissée au lecteur. Ensuite, compte tenu de (8), il suffit de prouver le troisième point.

Si $h \in \mathbb{N}$, l'inégalité (5) implique

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|T_n\|_{(h)} = \max_{i\leq h} \left\|\frac{T_n^{(i)}}{i!}\right\|_{[-1,1]} \leq \max_{i\leq h} \frac{n^{2i}}{i!} \leq n^{2h}.$$

On pose $r = 2h+2$, alors, d'après l'inégalité (10), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} |a_n(f)| \|T_n\|_{(h)} &\leq \frac{(2h+2)!}{n^{2h+2}} 2^{2h+2} n^{2h} \|f\|_{(2h+2)} \\ &\leq \frac{1}{n^2} 2^{2h+2} (2h+2)! \|f\|_{(2h+2)}. \end{aligned}$$

Comme on a $|a_0(f)| \leq \|f\|_{[-1,1]} \leq \|f\|_{(2h+2)}$ et $T_0 = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)| \|T_n\|_{(h)} \leq \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) 2^{2h+2} (2h+2)! \|f\|_{(2h+2)}$$

ce qui démontre la relation (11). ■

Remarque 6 Les trois propriétés du théorème précédent expriment que le système $\left\{(T_n)_{n\geq 0}, (a_n)_{n\geq 0}\right\}$ est une *base de Schauder absolue* de l'espace de Fréchet $C^\infty([-1,1])$. Elles impliquent en particulier que, pour toute fonction f appartenant à $C^\infty([-1,1])$, on a $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) T_n$, avec convergence normale de cette série dans tous les espaces de Banach $\left(C^k([-1,1]), \|.\|_{(k)}\right)$.

4 Extension linéaire de $C^\infty([-1,1])$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$

Dans cette partie, en multipliant les polynômes T_n par des fonctions troncatures adaptées, on établit un théorème d'extension linéaire dû à B. S. Mityagin ([7]).

Lemme 4 *Il existe une suite* $\left(\widetilde{T}_n\right)_{n\geq 0}$ *formée de fonctions appartenant à* $C^\infty(\mathbb{R})$ *vérifiant*
• *pour tout* $n \in N$, *le support de* $\widetilde{T}_n$ *est inclus dans* $[-2,2]$ *et* $\widetilde{T}_{n|[-1,1]} = T_n$,
• *pour tout* $k \in N$, *il existe* $C_k \in R_+^*$ *tel que, pour tout* $n \in N$, *on ait*

$$\left\|\widetilde{T}_n\right\|_{(k)} \leq C_k \left\|T_n\right\|_{(2k)}. \tag{12}$$

Démonstration. Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à 1 sur $[1,+\infty[$. Pour tout entier n, on considère la fonction définie par $u_n(x) = 1 - u\left(\left(1+n^2\right)(|x|-1)\right)$. C'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, à support dans $\left[-1-\frac{1}{1+n^2}, 1+\frac{1}{1+n^2}\right]$, égale à 1 sur $[-1,1]$ et vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|u_n\right\|_{(k)} = \max_{i\leq k} \sup_{x;|x|\leq 1+\frac{1}{1+n^2}} \left|\frac{u_n^{(i)}(x)}{i!}\right| \leq \left(1+n^2\right)^k \max_{i\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{u^{(i)}(x)}{i!}\right|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\widetilde{T}_n = T_n u_n$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $i \in \mathbb{N}$ avec $i \leq k$, en utilisant la formule de Leibniz et l'inégalité (7), pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\left(T_n u_n\right)^{(i)}(x)}{i!}\right| &= \left|\sum_{l=0}^{i} \frac{T_n^{(l)}(x)}{l!}\frac{u_n^{(i-l)}(x)}{(i-l)!}\right| \leq \sum_{l=0}^{i} e^2 \frac{n^{2l}}{l!} \left\|u_n\right\|_{(i)} \left(1+n^2\right)^{i-l} \\ &\leq e^2\left(1+n^2\right)^i \|u\|_{(i)} \sum_{l=0}^{i}\frac{1}{l!} \leq e^3\left(1+n^2\right)^i \|u\|_{(i)}.\end{aligned}$$

Comme la suite $\left(\|u\|_{(i)}\right)_{i\geq 0}$ est croissante, on a

$$\left\|T_n u_n\right\|_{(k)} = \max_{i\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\left(T_n u_n\right)^{(i)}}{i!}(x)\right| \leq e^3\left(1+n^2\right)^k \|u\|_{(k)}.$$

On suppose que $n \geq 1$. D'après la propriété de biorthogonalité du théorème 6, on a $a_n(T_n) = 1$. Donc, d'après l'inégalité (10),

$$n^{2k} \leq 2^{2k}(2k)!\left\|T_n\right\|_{(2k)}$$

et donc

$$\left(1+n^2\right)^k \leq \left(2n^2\right)^k \leq 2^{3k}(2k)!\left\|T_n\right\|_{(2k)}.$$

Ainsi

$$\left\|T_n u_n\right\|_{(k)} \leq \|u\|_{(k)} e^3 2^{3k} \left\|T_n\right\|_{(2k)}.$$

Comme $T_0 = 1$ et $\left\|u_0\right\|_{(k)} = \|u\|_{(k)}$, l'inégalité précédente est vraie pour $n = 0$.
■

Voici le résultat principal de ce paragraphe, il s'agit du théorème d'extension linéaire suivant.

Théorème 7 *Il existe une application linéaire continue U, de $C^\infty([-1,1])$ dans $C_0^\infty([-2,2])$ telle que, pour toute fonction f appartenant à $C^\infty([-1,1])$, on ait*

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in[-1,1],(U(f))^{(k)}(x)=f^{(k)}(x).$$

Ici $C_0^\infty([-2,2])$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-2,2]$. Bien sûr, on a posé

$$\|U(f)\|_{(k)}=\max_{i\leq k}\left\|\frac{(U(f))^{(i)}}{i!}\right\|_{[-2,2]}.$$

Pour tout entier k, $\left(C_0^k([-2,2]),\|.\|_{(k)}\right)$ est un espace de Banach. Muni de la famille de normes $\left(\|.\|_{(k)}\right)_{k\geq 0}$, $C_0^\infty([-2,2])$ est un espace de Fréchet; il peut lui aussi être muni d'une distance lui conférant une structure d'espace métrique complet.

La continuité de l'application linéaire U signifie que pour tout $k'\in\mathbb{N}$, il existe $k\in\mathbb{N}$ et $\widetilde{C}\in\mathbb{R}_+^*$ tels que, pour toute fonction $f\in C^\infty([-1,1])$, on ait

$$\|U(f)\|_{(k')}\leq\widetilde{C}\,\|f\|_{(k)}. \tag{13}$$

C'est, pour les espaces de Fréchet, l'analogue de la caractérisation de la continuité pour une application linéaire entre deux espaces de Banach. (Voir [6] proposition 22.6.)

Démonstration. On considère l'application qui à f associe

$$U(f)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(f)\,\widetilde{T}_n. \tag{14}$$

Si $k'\in\mathbb{N}$, alors, d'après (12), on a $\left\|\widetilde{T}_n\right\|_{(k')}\leq C_{k'}\|T_n\|_{(2k')}$ et, en utilisant (11) avec $h=2k'$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n(f)|\left\|\widetilde{T}_n\right\|_{(k')}\leq C_{k'}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n(f)|\,\|T_n\|_{(2k')}\leq CC_{k'}\|f\|_{(k)}.$$

La série (14) converge normalement dans tous les espaces de Banach $\left(C_0^{k'}([-2,2]),\|.\|_{(k')}\right)$ et définit donc une fonction appartenant à $C_0^\infty([-2,2])$. L'inégalité (13) est satisfaite. ■

5 Commentaires

Le théorème 7 constitue une étape importante dans la longue histoire des théorèmes d'extension de type Whitney. Le théorème d'extension de Whitney peut être compris comme la réciproque du théorème de Taylor. Précisons un petit peu en nous limitant aux cas des fonctions d'une seule variable.

Dans tout ce qui suit K désigne un compact non vide de $\mathbb{R}$.

Un *jet* F sur K est la donnée d'une suite $\left(F^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $p \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leq p$ et $(\zeta, x) \in K^2$, on définit le *reste de Taylor* $R_\zeta^{j,p}F(x)$ par

$$R_\zeta^{j,p}F(x) = F^{(j)}(x) - \sum_{k=0}^{p-j} \frac{1}{k!}(x-\zeta)^k F^{(j+k)}(\zeta).$$

On dit que F est un jet de Whitney de classe C^∞ s'il vérifie la condition de Taylor suivante :

pour tout couple d'entiers $(p,\ j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $j \leq p$, si $|x-\zeta|$ tend vers 0 avec $(x,\zeta) \in K^2$, on a

$$R_\zeta^{j,p}F(x) = o\left(|x-\zeta|^{p-j}\right).$$

Un exemple typique de jet de Whitney de classe C^∞ est donné par la restriction d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ via l'application de restriction suivante :

$$R_K : f \mapsto \left(f_{|K}^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Le théorème d'extension de Whitney ([10]) affirme que l'application R_K est surjective. En d'autres termes il dit qu'un jet de Whitney de classe C^∞ provient d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Si K est un singleton il s'agit du célèbre théorème de Borel (le théorème 1 rappelé dans l'introduction).

Ensuite on peut se demander sous quelles conditions l'extension peut être réalisée par un opérateur linéaire continu. Un tel opérateur n'existe pas en général, pour s'en convaincre il suffit de considérer le cas où le compact est un singleton. La réponse à cette question dépend de la géométrie du compact puisque le théorème 7 montre que, lorsque le compact est $[-1,1]$, un tel opérateur existe. De plus, dans ce cas, il est donné par une construction explicite.

Si on s'intéresse aux autres résultats fournissant une preuve constructive il convient de mentionner les travaux de W. Pawłucki et W. Pleśniak. Ils ont construit dans [8] un opérateur d'extension linéaire lorsque le compact K vérifie la propriété de Markov suivante :

pour tout polynôme Q et tout entier j, on a

$$\sup_{x\in K}\left|Q^{(j)}(x)\right| \leq \mathcal{M}(\deg Q)^{rj}\sup_{x\in K}|Q(x)|.$$

avec des constantes $\mathcal{M}$ et r qui ne dépendent ni de Q ni de j.

Leur méthode est basée sur l'approximation à l'aide de polynômes de Lagrange.

Des résultats similaires ont été obtenus récemment par A. Goncharov dans [5], pour des compacts irréguliers de $\mathbb{R}$ ne vérifiant pas nécessairement la propriété de Markov. Bien que plus compliquée, la construction est semblable à celle qui a été donnée ici pour le théorème 7 : il construit une base de l'espace des jets puis il étend individuellement les éléments de cette base.

Pour terminer ces commentaires, on peut mentionner que d'autres travaux concernent les problèmes d'extension dans des sous-algèbres naturelles du C^∞ : les classes ultradifférentiables. Ce sont des ensembles de fonctions infiniment dérivables, définis par des conditions de croissance des dérivées. (Comme par exemple les classes de Gevrey qui sont importantes dans les problèmes d'équations aux dérivées partielles.) Pour l'extension au-dessus d'un singleton, avec les notations du théorème 1 de l'introduction, il s'agit de la question suivante : si la suite $(u_p)_{p\geq 0}$ vérifie des «conditions de croissance», peut-on construire une fonction f dont les dérivées vérifient des «conditions analogues»? Le lecteur intéressé pourra consulter [1] où sont présentées les principales classes ultradifférentiables ayant de bonnes propriétés d'extension.

6 Annexe 1 : la démonstration de la formule de Faà di Bruno

Ici, on reprend les notations de la proposition 5. Sans restreindre à la généralité, on peut supposer que $x = 0$ et que $g(0) = 0$.

Le coefficient de x^r dans le développement limité de $f \circ g(x)$ en 0 est

$$\frac{(f \circ g)^{(r)}(0)}{r!}.$$

C'est aussi le coefficient de x^r dans le polynôme

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left(\sum_{s=1}^{r} \frac{g^{(s)}(0)}{s!} x^s \right)^i.$$

On rappelle la formule du multinôme qui s'écrit

$$(x_1 + ... + x_r)^i = \sum_{(j_1,...,j_r)\in\mathbb{N}^r \text{ tq } \sum_{s=1}^{r} j_s = i} \frac{i!}{j_1!...j_r!} x_1^{j_1}...x_r^{j_r}.$$

On a donc

$$\left(\sum_{s=1}^{r} \frac{g^{(s)}(0)}{s!} x^s \right)^i$$
$$= \sum_{(j_1,...,j_r)\in\mathbb{N}^r \text{ tq } \sum_{s=1}^{r} j_s = i} \frac{i!}{j_1!...j_r!} \left(\frac{g^{(1)}(0)}{1!} \right)^{j_1} ... \left(\frac{g^{(r)}(0)}{r!} \right)^{j_r} x^{\sum_{s=1}^{r} s j_s}.$$

Donc le coefficient de x^r dans $\sum_{i=1}^{r} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left(\sum_{s=1}^{r} \frac{g^{(s)}(0)}{s!} x^s \right)^i$ est

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left[\sum_{(j_1,...,j_r)\in\mathbb{N}^r \text{ tq } \sum_{s=1}^{r} j_s = i \text{ et } \sum_{s=1}^{r} s j_s = r} \frac{i!}{j_1!...j_r!} \prod_{s=1}^{r} \left(\frac{g^{(s)}(0)}{s!} \right)^{j_s} \right]$$

soit

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{g^{(s)}(0)}{s!}\right)^{j_s}\right)$$

en posant

$$J_{i,r}=\left\{(j_1,...,j_r)\in\mathbb{N}^r,\sum_{s=1}^{r}sj_s=r\text{ et }\sum_{s=1}^{r}j_s=i\right\}$$

et, pour $J=(j_1,...,j_r)\in J_{i,r}$,

$$C_{J,i,r}=\frac{i!}{j_1!...j_r!}.$$

Il reste à montrer la formule combinatoire concernant les coefficients $C_{J,i,r}$.

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $f_\lambda : t\mapsto\frac{1}{1-\lambda t}$. On considère aussi la fonction $g : t\mapsto\frac{t}{1-t}$. Alors, pour tout entier $s>0$, $\frac{g^{(s)}(0)}{s!}=1$ et, pour tout entier i, $\frac{f_\lambda^{(i)}(0)}{i!}=\lambda^i$. Donc la formule (9) donne, pour tout entier $r>0$,

$$\frac{(f_\lambda\circ g)^{(r)}(0)}{r!}=\sum_{i=1}^{r}\lambda^i\left(\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\right).$$

D'autre part $f_\lambda\circ g(x)=\frac{1}{1-\lambda\frac{x}{1-x}}=\frac{1-x}{1-(\lambda+1)x}$, on peut donc développer $f_\lambda\circ g$ en série entière au voisinage de 0 (le rayon de convergence est $R_\lambda=\frac{1}{\lambda+1}>0$). On obtient, pour tout $x\in\left]-\frac{1}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1}\right[$,

$$\begin{aligned}f_\lambda\circ g(x)&=\sum_{k\geq0}((\lambda+1)x)^k-\sum_{k\geq0}((\lambda+1)x)^{k+1}\\&=1+\sum_{k\geq1}\left((\lambda+1)^k-(\lambda+1)^{k-1}\right)x^k\\&=1+\sum_{k\geq1}(\lambda+1)^{k-1}\lambda x^k.\end{aligned}$$

Le coefficient de x^r dans cette série entière est $(\lambda+1)^{r-1}\lambda$ et il est égal à $\frac{(f_\lambda\circ g)^{(r)}(0)}{r!}$. Ainsi

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\sum_{i=1}^{r}\lambda^i\left(\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\right)=(\lambda+1)^{r-1}\lambda.$$

L'égalité précédente ayant lieu pour une infinité de réels λ, elle implique que $\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}$ est le coefficient de λ^i dans le développement de $(\lambda+1)^{r-1}\lambda$; c'est donc $\binom{r-1}{i-1}$.

7 Annexe 2 : il n'y a pas de version linéaire continue du théorème 1

Dans ce paragraphe, on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites de réels et on définit sur cet espace une topologie construite sur le modèle de celle de l'espace des fonctions de classe C^{∞} sur $[-1,1]$. On démontre ensuite que l'extension au-dessus du singleton $\{0\}$ ne peut pas être réalisée à l'aide d'un opérateur linéaire continu, de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $C^{\infty}([-1,1])$. (La topologie de l'espace $C^{\infty}([-1,1])$ a été définie au paragraphe 3 ; on prend cet espace à la place de $C^{\infty}(\mathbb{R})$ juste par commodité, pour ne pas avoir à définir la topologie de $C^{\infty}(\mathbb{R})$.)

Si $u = (u_p)_{p\geq 0}$ est une suite de réels, on note, pour tout entier k,

$$\|u\|_{[k]} = \max_{i\leq k} \left|\frac{u_i}{i!}\right|.$$

On définit ainsi une famille de semi-normes $\left(\|.\|_{[k]}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est lui aussi un espace de Fréchet dont la topologie est induite par la distance obtenue en posant $d(u,v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|u-v\|_{[k]}}{1+\|u-v\|_{[k]}}$, pour tout couple de suites (u,v).

On suppose qu'il existe une application linéaire continue

$$U : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to C^{\infty}([-1,1])$$

telle que, pour toute suite de réels $u = (u_p)_{p\geq 0}$, on ait

$$\forall p \in \mathbb{N}, (U(u))^{(p)}(0) = u_p.$$

Comme au paragraphe 4, la continuité de l'application linéaire U signifie que, pour tout $k' \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{C} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour toute suite de réels u, on ait

$$\|U(u)\|_{(k')} \leq \widetilde{C}\, \|u\|_{(k)}.$$

(C'est encore la proposition 22.6 de [6].) En particulier, en choisissant $k' = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{C} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour toute suite de réels u, on ait

$$\sup_{t\in[-1,1]} |U(u)(t)| \leq \widetilde{C}\, \|u\|_{(k)}.$$

Maintenant, si u est la suite définie par $u_p = 0$ si $p \leq k$ ou si $p \geq k+2$ et $u_{k+1} = 1$, alors $\|u\|_{(k)} = 0$ et donc la fonction $U(u)$ est nulle sur $[-1,1]$. Mais ceci n'est pas possible puisque $(U(u))^{(k+1)}(0) = 1$.

Bibliographie

[1] P. Beaugendre, Théorèmes de type Whitney dans des intersections de classes ultradifférentiables. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 73, 2-3, (2004), 81-97, un tiré à part peut être envoyé sur demande.

[2] E. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 12 (1895), 9-55.

[3] R. De Vore, G. Lorentz, Constructive approximation. Springer-Verlag, (1993).

[4] M. V. Golitschek, Short proofs for the inequalities of Szegö, Markov and Zygmund. Approximation and function spaces, Proc. 27th Semest., Warsaw/Pol. 1986, Banach Center Publ. 22, 165-168 (1989).

[5] A. Goncharov, On the explicit form of an extension operator for C^∞-functions, East Journal on Approximations, 7, 2 (2001), 179-193.

[6] R. Meise et D. Vogt, Introduction to Functional Analysis. Oxford Gratuate Texts in Mathematics (1997).

[7] B. S. Mityagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, Russian Math. Surveys, 16 (1961), 59-127.

[8] W. Pawłucki et W. Pleśniak, Extension of C^∞ functions from sets with polynomial cusps, Studia Math. 88 (1988), 279-287.

[9] T. J. Rivlin, Chebyshev polynomials, 2nd edn. Wiley and sons, New York (1990).

[10] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc 36 (1934), 63-89.