Pascal BEAUGENDRE

http://site.voila.fr/pbeaugendre_maths/enonce_wh.pdf

Le théorème de Whitney

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définitions. Un *jet* F sur K est la donnée d'une famille $\left(F^{(J)}\right)_{J\in\mathbb{N}^n}$ de fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si K est inclus dans Ω et si $f \in C^\infty(\Omega)$, alors $\left(f_{|K}^{(L)}\right)_{L\in\mathbb{N}^n}$ est un jet. L'application $R_K : f \mapsto \left(f_{|K}^{(L)}\right)_{L\in\mathbb{N}^n}$ est appelée *l'application de restriction à* K.

On s'intéresse au problème d'extension suivant : si F est un jet, existe-t-il une fonction f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, telle que $R_K(f) = F$? Bien sûr, on suppose que le jet vérifie les estimations de Taylor.

Définitions. Soient $p \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}^n$ tels que $|J| \leq p$ et $(\zeta, x) \in K^2$. On définit le *reste de Taylor* $R_\zeta^{J,p}F(x)$ par

$$R_\zeta^{J,p}F(x) = F^{(J)}(x) - \sum_{K;|J+K|\leq p} \frac{1}{K!}(x-\zeta)^K F^{(J+K)}(\zeta).$$

On dit que F est un *jet de Whitney de classe* C^∞ *sur* K ou plus simplement un *jet de Whitney sur* K si, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $J \in \mathbb{N}^n$ tels que $|J| \leq p$, on a $R_\zeta^{J,p}F(x) = o\left(|x-\zeta|^{p-j}\right)$ dès que $|x-\zeta|$ tend vers 0 avec $(x,\zeta) \in K^2$. On note $C^\infty(K)$ l'ensemble des jets de Whitney.

Ainsi, un jet de Whitney est un jet qui se souvient qu'il est éventuellement le jet d'une fonction de classe C^∞. On définit sur $C^\infty(K)$ une famille de semi-normes $\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\|F\|_p = \sup_{J\in\mathbb{N}^n;|J|\leq p;x\in K} \left|F^{(J)}(x)\right| + \sup_{\substack{J\in\mathbb{N}^n;|J|\leq p \\ (\zeta,x)\in K^2,\zeta\neq x}} \frac{\left|R_\zeta^{J,p}F(x)\right|}{|\zeta-x|^{p-j}}.$$

H. Whitney a montré que la condition nécessaire donnée ci-dessus est aussi suffisante.

Théorème ($[Wh]$). *Soit F un jet ; F est un jet de Whitney sur K, si et seulement si, il existe une fonction f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, telle que $F = R_K(f)$.*