Pascal BEAUGENDRE

http://site.voila.fr/pbeaugendre_maths/def_ul_diff.pdf

Classes ultradifférentiables de fonctions et de jets.

Ce sont des ensembles de fonctions infiniment dérivables (resp. de jets), définis par des conditions de croissance.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que ϕ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant la condition (H_{na}) suivante

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\phi(t)}{t}=+\infty.$$

Définitions. La classe $\{\phi(t),\Omega\}$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω vérifiant

$$\sup_{P\in\mathbb{N}^n;p=|P|}\sup_{x\in\Omega}\frac{\left|f^{(P)}(x)\right|}{p!\exp(\phi(p))}<+\infty.$$

On vérifie facilement que l'espace $\{\phi(t),\Omega\}$, muni de la norme $=\|f\|_{\{\phi(t),\Omega\}}$ définie par $\|f\|_{\{\phi(t),\Omega\}}=\sup\limits_{P\in\mathbb{N}^n;p=|P|}\sup_{x\in\Omega}\frac{\left|f^{(P)}(x)\right|}{p!\exp(\phi(p))}$ est un espace de Banach.

La classe $\{\phi(t),K\}$ désigne l'ensemble des jets F définis sur K vérifiant :

il existe $C\geq 0$ tel que l'on ait

$$\sup_{P\in\mathbb{N}^n;p=|P|}\sup_{x\in K}\frac{\left|F^{(P)}(x)\right|}{p!\exp(\phi(p))}\leq C$$

et, pour tout entier p, pour tout multi-indice J de longueur $j\leq p$ et, pour tout $(x,\zeta)\in K^2$,

$$\left|R_\zeta^{J,p}F(x)\right|\leq Cj!\exp(\phi(p+1))\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}.$$

On vérifie facilement que la classe $\{\phi(t),K\}$ est un espace de Banach. (En prenant pour norme du jet F, la plus petite constante C réalisant les deux inégalités précédentes). Les éléments de $\{\phi(t),K\}$ sont bien sûr des jets de Whitney sur K.

Remarque. Si l'ouvert Ω est borné, $\{\phi(t),\Omega\}$ contient l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$; la fonction ϕ mesure le "défaut d'analyticité" de la classe.